ECOLE POLYTECHNIQUE CONCOURS D'ADMISSION 1988 OPTION M'

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

Sauf en ce qui concerne la définition des notations, la partie III *peut être traitée indépendamment des deux autres.*

Dans tout le problème, a est un réel strictement positif et $\mathfrak{D}$ est l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles définies et continuement dérivables sur l'intervalle semi-ouvert $]0, a]$.

I

1. Soit $f \in \mathfrak{D}$. On suppose dans cette question qu'il existe un réel $\gamma \geqslant 0$ tel que

l'intégrale $\int_0^a t^\gamma |f'(t)|\, dt$ soit convergente.

a. Montrer que, si $\gamma = 0$, la fonction f a une limite finie à droite en 0 et qu'elle est bornée sur $]0, a]$.

b. Si $\gamma > 0$, montrer que la fonction $t \mapsto t^\gamma f(t)$ est bornée sur $]0, a]$.

c. Si $\gamma > 0$, montrer que $t^\gamma f(t)$ tend vers 0 à droite en 0 (on pourra utiliser l'intégrale $\int_1^{t_0} u^\gamma |f'(u)|\, du$ où t_0 est un réel convenablement choisi).

d. Montrer par un exemple que si $\delta \in]0,\gamma[$ est un réel fixé, $t^{\gamma-\delta} f(t)$ peut tendre vers $+\infty$ à droite en 0.

2. Soit $f \in \mathfrak{D}$. On suppose dans cette question qu'il existe un réel $\alpha \geqslant 0$ tel que l'intégrale

$\int_0^a t^{2\alpha} f'^2(t)\, dt$ soit convergente.

a. Si $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$, majorer $|\int_s^t f'(u)du|$, où $0 < s < t \leqslant a$, et en déduire que f a une limite à droite en 0. Pourquoi ne peut-on déduire des hypothèses aucune information sur la valeur de cette limite ?

b. Si $\alpha > \frac{1}{2}$, montrer que $t^{\alpha-\frac{1}{2}} f(t)$ tend vers 0 à droite en 0 ; montrer par un exemple que si $\delta \in]0, \alpha - \frac{1}{2}[$ est un réel fixé, $t^{\alpha-\frac{1}{2}-\delta} f(t)$ peut tendre vers $+\infty$ à droite en 0.

c. Dans le cas intermédiaire $\alpha = \frac{1}{2}$, quelle information obtient-on de l'exemple de la fonction f_1 définie par $f_1(t) = \ln(1 + \ln a - \ln t)$? Même question pour $f_2 = 1$.

d. Pour $\alpha \in [0, +\infty[$, montrer que pour tout réel $\delta > 0$ l'intégrale $\int_0^a t^{\alpha-\frac{1}{2}+\delta} f'(t)dt$ est absolument convergente et montrer par un exemple que $\int_0^a t^{\alpha-\frac{1}{2}} f'(t)dt$ peut être divergente. Donner une nouvelle preuve du résultat de I.2a concernant l'existence d'une limite pour f à droite en 0.

Tournez la page S.V.P.

II

Dans toute la suite du problème, α est un réel fixé appartenant à $]0, \frac{1}{2}[$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{D}$ telles que l'intégrale $\int_0^a t^{2\alpha} f^2(t)\,dt$ soit convergente, $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{D}$ telles que les intégrales $\int_0^a t^{2\alpha-2} f^2(t)\,dt$ et $\int_0^a t^{2\alpha} f'^2(t)\,dt$ soient convergentes toutes deux, et $\mathcal{G}$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ défini par la condition supplémentaire $f(a) = 0$ vérifiée pour toute $f \in \mathcal{G}$.

1. a. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ en sont des sous-espaces vectoriels.

b. On munit $\mathcal{E}$, et par suite $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, de la forme bilinéaire

$$(f, g) \mapsto (f \mid g) = \int_0^a t^{2\alpha} f(t)\, g(t)\, dt \quad .$$

Montrer que cette forme bilinéaire est un produit scalaire euclidien. On notera désormais $\| f \|$ la norme de $f \in \mathcal{E}$ associée à ce produit scalaire.

c. Trouver la limite au sens de la norme $\| \cdot \|$ de la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ des fonctions définies par

$$f_n(t) = (a - t)\, t^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \alpha} \quad .$$

Les sous-espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont-ils fermés dans $\mathcal{E}$?

2. Soit ρ un réel fixé. Pour tout réel $\lambda \geqslant 0$, on considère sur l'intervalle $]0, a]$ l'équation différentielle

$$E_\lambda : \quad y'' + \frac{2\alpha}{t} y' + (\lambda - \frac{\rho}{t^2})\, y = 0 \quad .$$

Sans chercher à la résoudre, on suppose de plus qu'elle admet une solution $\psi_\lambda \in \mathcal{F}$.

a. Montrer que l'intégrale $\int_0^a t^{2\alpha+2} \psi''^2_\lambda(t)\,dt$ converge.

b. Pour toute $f \in \mathcal{F}$, montrer, en posant $\chi = \psi'_\lambda f$, que l'intégrale $\int_0^a t^{2\alpha} |\chi'(t)| dt$ est convergente et en déduire la limite à droite en 0 de $t^{2\alpha}\, \psi'_\lambda(t) f(t)$.

3. Soit $\mu \geqslant 0$ un réel différent de λ. On suppose que la solution ψ_λ de E_λ appartient en fait à $\mathcal{G}$ et que l'équation E_μ admet une solution $\psi_\mu \in \mathcal{G}$.

a. Exprimer $t^{2\alpha}\, \psi_\lambda(t)\psi_\mu(t)$ à l'aide de la dérivée de $t^{2\alpha}\, [\psi_\lambda(t)\psi'_\mu(t) - \psi_\mu(t)\psi'_\lambda(t)]$.

b. En déduire que ψ_λ et ψ_μ sont orthogonales dans $\mathcal{E}$.

Tournez la page S.V.P.

On suppose désormais que a est le nombre π et que $\rho = \alpha - \alpha^2$, avec toujours $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$.

1. a. Trouver les fonctions θ à valeurs réelles et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ telles que le changement de fonction inconnue $y = \theta z$ remplace E_λ par une équation différentielle linéaire à coefficients constants vérifiée par z. Peut-on faire en sorte que cette équation différentielle soit dépourvue de terme en z' ?

b. Intégrer E_λ. Quelles sont ses solutions dans $\mathcal{F}$? Pour quelles valeurs de λ obtient-on des solutions dans $\mathcal{G}$? En déduire une suite orthonormale $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions de $\mathcal{G}$ qu'on explicitera, en classant les fonctions φ_n dans l'ordre croissant des valeurs de λ pour lesquelles elles sont solutions de E_λ, et en choisissant ces valeurs de λ aussi nombreuses que possible.

2. On considère la fonction $f \in \mathcal{E}$ définie par $f(t) = t^{-2}$.

a. Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer $\hat{f}_n = (f \mid \varphi_n)$.

b. Montrer que la série $\sum_1^{+\infty} \hat{f}_n \varphi_n$ converge vers f simplement sur $]0, \pi]$. Cette conver gence est-elle uniforme ?

c. La série $\sum_1^{+\infty} \hat{f}_n \varphi_n$ converge-t-elle vers f au sens de la norme de $\mathcal{E}$?

3. On considère la fonction $g \in \mathcal{E}$ définie par $g(t) = t^{-2\alpha}$.

a. Montrer que $\hat{g}_n = (g \mid \varphi_n)$ est, lorsque $n \to +\infty$, un infiniment petit équivalent à An^β où β est un réel qu'on explicitera et A une constante qu'on ne cherchera pas à calculer.

b. Les séries de termes généraux $\hat{g}_n$ et $\hat{g}_n^2$ sont-elles convergentes ?

4. On considère une série absolument convergente de terme général réel γ_n $(n \geqslant 1)$.

a. Montrer que la série $\sum_1^{+\infty} \gamma_n \varphi_n$ converge simplement sur $]0, \pi]$ et indiquer des parties de $]0, \pi]$ sur lesquelles la convergence est uniforme.

b. La somme k de cette série appartient-elle à $\mathcal{E}$?

5. La fonction k étant définie ci-dessus, on cherche les solutions définies sur $]0, \pi]$ de l'équation différentielle $\quad E : \quad y'' + \frac{2\alpha}{t} y' - \frac{\alpha - \alpha^2}{t^2} y = k \quad$ et qui, de plus, appartiennent à $\mathcal{G}$.

a. Montrer qu'il ne peut y avoir deux solutions distinctes répondant à ces conditions.

b. On suppose qu'il existe une fonction h de la forme $h = \sum_1^{+\infty} \beta_n \varphi_n$, dont les deux premières dérivées sont obtenues en dérivant terme à terme la série du second membre, et telle que h soit solution de E sur $]0, \pi]$. Montrer que ces conditions sont remplies pour un choix convenable des réels β_n, qu'on explicitera à l'aide des γ_n.

c. Montrer que $h \in \mathcal{G}$.

♦ ♦
♦

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail